Раздел 1. Занятие 3.

1°. Дифференцирование по параметру.

Если:

(а) функция $f(x,y)$ непрерывна вместе со своей производной $f'_y(x,y)$ в области $a \le x < +\infty$, $y_1 < y < y_2$;

(б) $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится при каждом $y \in (y_1; y_2)$;

(в) $\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$ сходится равномерно в интервале $(y_1; y_2)$, то

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$$

при $y_1 < y < y_2$.

Класс: №№ 3784, 3787, 3789, 3790, 3794, 3796, 3799, 3812.

№3789 Доказать формулу Фруллани:

I. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна для всех $x \in [0;+\infty)$ и существует конечный предел $f(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Тогда имеет место формула для $a>0$ и $b>0$:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = (f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}.$$

Доказательство: при $0<\delta<\Delta<+\infty$ существует интеграл

$$\int\limits_\delta^\Delta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int\limits_\delta^\Delta \frac{f(ax)}{x}dx - \int\limits_\delta^\Delta \frac{f(bx)}{x}dx =$$

$$= \int\limits_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(z)}{z}dz - \int\limits_{b\delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz = \int\limits_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz - \int\limits_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz.$$

Отсюда получаем:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \lim_{\delta\to0}\int\limits_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz - \lim_{\Delta\to+\infty}\int\limits_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz$$

Применяя первую теорему о среднем, имеем:

$$\int\limits_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz = f(\xi)\int\limits_{a\delta}^{b\delta}\frac{dz}{z} = f(\xi)\ln\frac{b}{a},\quad a\delta\le\xi\le b\delta,$$

$$\int\limits_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz = f(\eta)\int\limits_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{dz}{z} = f(\eta)\ln\frac{b}{a},\quad a\Delta\le\eta\le b\Delta.$$

При $\delta\to0$ и $\Delta\to+\infty$ $\xi\to0$, а $\eta\to+\infty$. Поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = [f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a} \qquad (*)$$

II. Пусть функция $f(x)$ не имеет предела при $x\to+\infty$, но существует интеграл $\int\limits_A^{+\infty}\frac{f(z)}{z}dz$ при любом $A>0$.

Тогда заменяя в доказательстве Δ сразу на $+\infty$ вместо равенства (*) пределы к соотношению:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

III. Пусть функция $f(x)$ не имеет конечного предела при $x \to +0$, но существует интеграл $\int^A \frac{f(z)}{z}\,dz$ при любом $A < +\infty$. Тогда приходим к формуле:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(+\infty)\ln\frac{a}{b}.$$

№ 3812 Исходя из интеграла

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx, \quad \alpha \geq 0$$

вычислить интеграл Дирихле

$$D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\beta x}{x}\,dx.$$

Вычисления проведем в несколько этапов:

ⓐ Покажем, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно относительно α на полупрямой $0 \leq \alpha < +\infty$. Имеем:

$$\int e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx = -\frac{e^{-\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2} + C = \Phi(\alpha, x) + C$$

При $\alpha \geq 0$ и $x \geq 0$ функция $\Phi(\alpha, x)$ ограничена:

$$|\Phi(\alpha, x)| \leq \frac{\alpha + |\beta|}{\alpha^2+\beta^2} \leq 2$$

Оценим интеграл:

$$\int_R^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx, \quad R > 0.$$

Интегрируя по частям при любых фиксированных $\alpha \geq 0$ и β, найдем:

$$\left|\int_R^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx\right| = \left|\Big[\Phi(\alpha, x)\Big]_R^{\infty} + \int_R^{\infty}\frac{\Phi(\alpha, x)}{x^2}\,dx\right| \leq$$

$$\le \frac{|\Phi(\alpha,R)|}{R} + \int_R^\infty \frac{|\Phi(\alpha,x)|}{x^2}dx$$

Откуда получаем оценку: $\left|\int_R^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx\right| \le \frac{2}{R} + 2\int_R^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{4}{R}$

Пусть теперь ε — произвольное положительное число. Выберем по ε число $B>0$ так, чтобы $\frac{4}{B} \le \varepsilon$. Тогда при всех $b \ge B$ и всех $\alpha \ge 0$ справедливо соотношение:

$$\left|\int_b^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx\right| < \varepsilon,$$

означающее равномерную сходимость по α на полупрямой $0 \le \alpha < +\infty$ исследуемого интеграла.

б) Интеграл $D(\beta)$ представляет собой предельное значение при $\alpha \to 0+0$ функции $I(\alpha)$. Действительно, подинтегральная функция в $I(\alpha)$ непрерывна при $\alpha \ge 0$ и $x \ge 0$ (при $x=0$ эта функцию считаем равной единице), а интеграл равномерно сходится по α на $[0;+\infty)$. Поэтому, интеграл $I(\alpha)$ есть непрерывная функция α на полупрямой $\alpha \ge 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{\alpha\to+0} I(\alpha) = D(\beta)$ $(*)$

в) Найдем для функции $I(\alpha)$ специальное представление при $\beta \ne 0$. Оно получается из выражения $I'(\alpha)$. Поэтому сначала убедимся в возможности дифференцирования интеграла $I(\alpha)$ по параметру α. Очевидны непрерывность подинтегральной функции и ее частной производной по α при $\alpha \ge 0$ и $x \ge 0$. Исследуем на равномерную сходимость интеграл

$$-\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx$$

от частной производной подинтегральной функции в $I(\alpha)$. Фиксируем любое $\Delta > 0$. При всех $\alpha \ge \Delta$ справедливо неравенство:

$$|e^{-\alpha x}\sin\beta x| \le e^{-\Delta x}$$

и интеграл $\int_0^\infty e^{-\Delta x}dx$ сходится, то по признаку Вейерштрасса интеграл $I'(\alpha)$ сходится равномерно по α для $\alpha \geqslant \Delta$. Поскольку Δ — любое положительное число, мы можем дифференцировать интеграл $I(\alpha)$ по параметру α при $\alpha > 0$. Итак, при $\alpha > 0$

$$I'(\alpha) = -\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x \, dx = -\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

Интегрируя по α при $\alpha > 0$:

$$I(\alpha) = -\beta \int \frac{d\alpha}{\alpha^2+\beta^2} = -\operatorname{sgn}\beta \, \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{|\beta|}\right) + C.$$

Найдем постоянную C. Так как при $x \geqslant 0$ $\left|\frac{\sin \beta x}{x}\right| \leqslant |\beta|$, то при $\alpha > 0$ получим неравенство

$$|I(\alpha)| \leqslant |\beta| \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{|\beta|}{\alpha},$$

из которого вытекает, что $\lim\limits_{\alpha \to \infty} |I(\alpha)| = 0$, и стало быть $\lim\limits_{\alpha \to \infty} I(\alpha) = 0$. Но $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{|\beta|} = \frac{\pi}{2}$. Находим $C = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta$. Итак, при $\alpha > 0$ функция $I(\alpha)$ представима в виде $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{|\beta|} \cdot \operatorname{sgn}\beta$. Отсюда и из $(*)$ получаем значение интеграла $D(\beta)$

$$D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}\beta \quad \text{при } \beta \neq 0.$$

При $\beta = 0$, очевидно $D(\beta) = 0$. Окончательно, имеем:

$$D(\beta) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta &, \text{ если } \beta \neq 0 \\ 0 &, \text{ если } \beta = 0. \end{cases}$$

№3784. Пользуясь формулой $\int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$ $(n>0)$ вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 x^{n-1} \ln^m x \, dx \quad , m \in N.$$

Поскольку $\lim\limits_{x \to 0} x^p \ln^m x = 0$ для всех $p > 0$ и $m \in N$, то непрерывны подинтегральная функция и ее частные производные по параметру n. Более того равномерно сходятся несобственные интегралы от функции и ее производных по параметру. Поэтому

$$I = \frac{1}{n} x^n \ln^m x \Big|_0^1 - \frac{m}{n}\int_0^1 x^{n-1}\ln^{m-1}x\,dx = -\frac{m}{n}\int_0^1 x^{n-1}\ln^{m-1}x\,dx =$$

$$= \left(-\frac{m}{n}\right)\left\{\frac{1}{n}x^n\ln^{m-1}x\Big|_0^1 - \frac{(m-1)}{n}\int_0^1 x^{n-1}\ln^{m-2}x\,dx\right\} = \frac{m(m-1)}{n^2}\int_0^1 x^{n-1}\ln^{m-2}x\,dx =$$

$$\ldots = (-1)^{m-1}\frac{m(m-1)\ldots 2}{n^{m-1}}\int_0^1 x^{n-1}\ln x\,dx = (-1)^{m-1}\frac{m(m-1)\ldots 2}{n^{m-1}}\left\{\frac{1}{n}x^n\ln x\Big|_0^1 -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n}\int_0^1 x^{n-1}dx\right\} = (-1)^m\frac{m!}{n^m}\int_0^1 x^{n-1}dx = (-1)^m\frac{m!}{n^{m+1}} \Rightarrow I = (-1)^m\frac{m!}{n^{m+1}}.$$

№3787 Показать, что функция

$$F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\,dx$$

непрерывна и дифференцируема в области $-\infty<\alpha<+\infty$.

Прежде всего заметим, что подинтегральная функция и ее частная производная по α:

$$f(\alpha,x)=\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}, \quad f'_\alpha(\alpha,x) = -\frac{2(x+\alpha)\cos x}{[1+(x+\alpha)^2]^2}$$

определены и непрерывны для всех $x\in[0;+\infty)$ и $\alpha\in(-\infty;+\infty)$.

Далее, для произвольного $L>0$ и $|\alpha|\le L$ покажем равномерную сходимость интеграла $F(\alpha)$. Для произвольного $\varepsilon>0$ существует число $B(\varepsilon)>0$, что $\int_{B(\varepsilon)}^{+\infty}\frac{dz}{1+z^2}<\frac{\varepsilon}{2}$, тогда для всех $B>A(\varepsilon)>L+B(\varepsilon)$ имеем цепочку неравенств:

$$\left|\int_B^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}dx\right| = \left|\int_{B+\alpha}^{+\infty}\frac{\cos(z-\alpha)}{1+z^2}dz\right| \le \left|\int_{B+\alpha}^{+\infty}\frac{\cos z}{1+z^2}dz\right| + \left|\int_{B+\alpha}^{+\infty}\frac{\sin z}{1+z^2}dz\right| \le$$

$$\le 2\int_{B+\alpha}^{+\infty}\frac{dz}{1+z^2} \le 2\int_{A(\varepsilon)+\alpha}^{+\infty}\frac{dz}{1+z^2} \le 2\int_{A(\varepsilon)-L}^{+\infty}\frac{dz}{1+z^2} \le$$

$$\le 2\int_{B(\varepsilon)}^{+\infty}\frac{dz}{1+z^2} < \varepsilon.$$

Это означает равномерную сходимость $F(\alpha)$ для $\forall|\alpha|\le L$. Зна-

Возьмем $\int\limits_0^1 x^{n-1}dx = \frac{1}{n}$ и продифференцируем

по параметру n.

При фиксированном n $\frac{1}{x^{1-n}}$ сходится при $1-n<1$

$\Rightarrow n>0$ верно.

Пусть $n \geq n_0 > 0$ и для возможности дифференцирования.

$$\int\limits_0^1 \ln x \cdot x^{n-1}dx = \left| \begin{matrix} \frac{1}{x}=t & dx=-\frac{dt}{t^2} \\ x=\frac{1}{t} & \end{matrix} \right| =$$

$$= -\int\limits_{+\infty}^{1} \ln\frac{1}{t}\,\frac{1}{t^{n-1}}\cdot\frac{dt}{t^2} = -\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^{n+1}}dt = \left| \begin{matrix} \ln t = z & dt=e^z dz \\ t=e^z & \end{matrix} \right| =$$

$$= -\int\limits_0^{+\infty}\frac{z e^z}{e^{(n+1)z}}dz = -\int\limits_0^{+\infty} z e^{-nz}dz \Rightarrow$$

$$z e^{-nz} \leq z e^{-n_0 z} \text{ сх-ся} \Rightarrow$$

интеграл сходится равномерно $\Rightarrow$ можно дифференцировать при $n \geq n_0 > 0$ $\Rightarrow$ можно дифференцировать при $n>0$

Имеем

$$\int\limits_0^1 \ln x\, x^{n-1}dx = -\frac{1}{n^2}$$

И так далее до порядка m!

№ 3787 Показать, что функция
$$F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\,dx$$
непрерывна и дифференцируема в области $-\infty < \alpha < +\infty$.

Прежде всего заметим, что подынтегральная функция и ее частная производная по α:
$$f(\alpha, x) = \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}, \quad f'_\alpha(\alpha, x) = -\frac{2(x+\alpha)\cos x}{(1+(x+\alpha)^2)^2}$$
определены и непрерывны для всех $x \in [0; +\infty)$ и $\alpha \in (-\infty; +\infty)$.

Далее, для произвольного $L > 1$ и $|\alpha| \le L$ покажем сначала равномерную сходимость интеграла $F(\alpha)$. При всех $x \geqslant 2L$ имеем оценку
$$\left|\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right| \le \frac{1}{1+(x+\alpha)^2} \le \frac{1}{1+x^2-2Lx}.$$
Покажем, что интеграл
$$\int\limits_{2L}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2-2Lx}$$
сходится. Действительно, имеем:
$$\int\limits_{2L}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2-2Lx} = \int\limits_{2L}^{+\infty} \frac{dx}{(x-L)^2-(L^2-1)} = \left| t = x-L \right| = \int\limits_{L}^{+\infty} \frac{dt}{t^2-(L^2-1)} =$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{L^2-1}} \ln\left|\frac{t+\sqrt{L^2-1}}{t-\sqrt{L^2-1}}\right| \Bigg|_L^{+\infty} = \frac{1}{2\sqrt{L^2-1}} \ln\left|\frac{L+\sqrt{L^2-1}}{L-\sqrt{L^2-1}}\right| < +\infty$$

Значит интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\,dx$$

сходится равномерно по признаку Вейерштрасса при $|\alpha|<L$. Значит функция $F(\alpha)$ непрерывна при $|\alpha|<L$, а значит и при $\alpha \in (-\infty;+\infty)$.

Теперь, для указанных $\alpha: |\alpha| \le L$ покажем равномерную сходимость интеграла

$$-2\int_0^{+\infty} \frac{(x+\alpha)\cos x}{\left(1+(x+\alpha)^2\right)^2}\,dx \,. \qquad \star$$

Имеем при всех $x \geqslant 2L$ оценку

$$\left|\frac{-2(x+\alpha)\cos x}{\left(1+(x+\alpha)^2\right)^2}\right| \le \frac{2|x+\alpha|}{\left(1+(x+\alpha)^2\right)^2} \le \frac{2(x+L)}{\left(1+x^2-2Lx\right)^2} \qquad (*)$$

Покажем, что при $x \geqslant 2L$ справедливо неравенство:

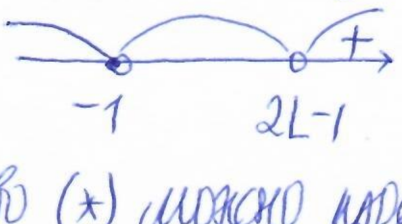
$$2(x+L) < 1+x^2-2Lx$$

или

$$x^2-2(L-1)x-(2L-1)>0$$

$$D_1=(L-1)^2+2L-1=L^2-2L+1+2L-1=L^2$$

$$x_{1,2}=(L-1)\pm L \;\begin{matrix}\nearrow 2L-1\\ \searrow -1\end{matrix}$$



верно!

Поэтому неравенство $(*)$ можно продолжить:

$$\frac{2(x+L)}{(1+x^2-2Lx)^2} \leq \frac{2}{1+x^2-2Lx}, \quad x \geqslant 2L$$

Значит интеграл ⊛ сходится равномерно. Сам интеграл $F(\alpha)$ при каждом фиксированном α также сходится. Это следует из его равномерной сходимости, установленной ранее. Значит функция $F(\alpha)$ является дифференцируемой при $|\alpha| < L$, а потому и при $\alpha \in (-\infty; +\infty)$.

чит $F(\alpha)$ непрерывна на сегменте $[-L;L]$. В силу произвольности L последнее означает непрерывность $F(\alpha)$ на интервале $(-\infty;+\infty)$.

Покажем дифференцируемость $F(\alpha)$. Действительно, $f(\alpha,x)$ и $f'_\alpha(\alpha,x)$ непрерывны для $x\in[0;+\infty)$ и $\alpha\in(-\infty;+\infty)$. При каждом фиксированном $\alpha\in(-\infty;+\infty)$:
$$|f(\alpha,x)|\le\frac{1}{1+(x+\alpha)^2}$$
и интеграл $\int\limits^{+\infty}\frac{dx}{1+(x+\alpha)^2}$ сходится. Тогда по признаку Вейерштрасса сходится и исходный интеграл $F(\alpha)$. Осталось показать равномерную сходимость интеграла
$$\int\limits_0^{+\infty}f'_\alpha(\alpha,x)\,dx$$

Выберем по произвольному $\varepsilon\in(0;1)$ число $B(\varepsilon)>\max\left\{\sqrt{\frac{4}{\varepsilon}-1},B_0(\varepsilon)\right\}$. Тогда для всех $B\ge A(\varepsilon)$:
$$\left|\int\limits_B^{+\infty}f'_\alpha(\alpha,x)\,dx\right|=\left|2\int\limits_B^{+\infty}\frac{(x+\alpha)\cos x\,dx}{[1+(x+\alpha)^2]^2}\right|=\left|2\int\limits_{B+\alpha}^{+\infty}\frac{z\cos(z-\alpha)}{[1+z^2]^2}dz\right|\le$$
$$\le\left|2\int\limits_{B+\alpha}^{+\infty}\frac{z\cos z\,dz}{[1+z^2]^2}\right|+\left|2\int\limits_{B+\alpha}^{+\infty}\frac{z\sin z\,dz}{[1+z^2]^2}\right|\le\left|\left[\frac{\cos z}{1+z^2}\right]\Big|_{B+\alpha}^{+\infty}\right|+\left|\int\limits_{B+\alpha}^{+\infty}\frac{\sin z}{1+z^2}dz\right|+$$
$$+\left|\left[\frac{\sin z}{1+z^2}\right]\Big|_{B+\alpha}^{+\infty}\right|+\left|\int\limits_{B+\alpha}^{+\infty}\frac{\cos z}{1+z^2}dz\right|\le\frac{2}{1+(B+\alpha)^2}+2\int\limits_{B+\alpha}^{+\infty}\frac{dz}{1+z^2}\le$$
$$\le\frac{2}{1+(A(\varepsilon)-L)^2}+2\int\limits_{A(\varepsilon)-L}^{+\infty}\frac{dz}{1+z^2}\le\frac{2}{1+B^2(\varepsilon)}+2\int\limits_{B(\varepsilon)}^{+\infty}\frac{dz}{1+z^2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Здесь $B_0(\varepsilon)$ следует из сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dz}{1+z^2}$

Итак интеграл $\int\limits_0^{+\infty}f'_\alpha(\alpha,x)dx$ равномерно сходится для $|\alpha|\le L$.

Это означает дифференцируемость $F'(\alpha)$ на сегменте $[-L;L]$. В силу произвольности L последнее означает дифференцируемость $F(\alpha)$ на интервале $(-\infty;+\infty)$.

№3790 Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx$, $a>0$, $b>0$.

Имеем: $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx=\Big/\ f(x)=\cos x\quad\int\limits_A^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx<\infty$ по признаку

Дирихле $I = f(0)\ln\frac{b}{a} = \ln\frac{b}{a}$. Итак $I = \ln\frac{b}{a}$.

№3794 Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx$, $\alpha>0$, $\beta>0$

Функция $f(\alpha,\beta,x) = \left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2$ и ее производные

$$f'_\alpha(\alpha,\beta,x) = -2e^{-\alpha x}\,\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}$$

$$f'_\beta(\alpha,\beta,x) = 2e^{-\beta x}\,\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}$$

определены и непрерывны для $x\in[0;+\infty)$, $\alpha\in(0;+\infty)$, $\beta\in(0;+\infty)$.

Интегралы $\int\limits_0^{+\infty} f(\alpha,\beta,x)\,dx$, $\int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(\alpha,\beta,x)\,dx$, $\int\limits_0^{+\infty} f'_\beta(\alpha,\beta,x)\,dx$

сходятся равномерно для $\alpha>0$ и $\beta>0$ по признаку Вейерштрасса.

(для произвольных $\alpha_0>0$ и $\beta_0>0$: $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ и $\beta\geqslant\beta_0>0$) Тогда

$$I'_\alpha = -2\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\,dx = -2\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha} = 2\ln\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$I'_\beta = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\,\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\,dx = 2\ln\frac{2\beta}{\alpha+\beta}$$

Действительно, $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\,dx = \int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}\,dx = \ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}$

$$I(\alpha,\beta) = 2\int\ln\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\,d\alpha + C(\beta) =$$

$$= \ln(2\alpha)^{2\alpha} - 2[\alpha+\beta]\ln[\alpha+\beta] + 2\beta + C(\beta) \Rightarrow$$

$$I'_\beta = \cancel{-2\ln[\alpha+\beta]} + C'_\beta = 2\ln 2\beta \cancel{-2\ln[\alpha+\beta]} \Rightarrow$$

$$C'_\beta = 2\ln 2\beta \Rightarrow C(\beta) = 2\int\ln 2\beta\,d\beta = 2\beta\ln 2\beta - 2\beta + C \Rightarrow$$

$$I(\alpha,\beta) = \ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}} + C$$

при $\alpha=\beta$ $I(\alpha,\beta)=0 \Rightarrow C=0$. Окончательно имеем

$$I(\alpha,\beta) = \ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}}.$$

№ 3796 Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx$, $\alpha>0, \beta>0$.

Функция $f(\alpha,\beta,x)=\dfrac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx$ и ее производные

$$f'_\alpha(\alpha,\beta,x) = -e^{-\alpha x}\cos mx\,,\quad f'_\beta(\alpha,\beta,x)=e^{-\beta x}\cos mx$$

определены и непрерывны для $x\in[0;+\infty)$, $\alpha\in(0;+\infty)$, $\beta\in(0;+\infty)$.
Интегралы $\int\limits_0^{+\infty} f(\alpha,\beta,x)\,dx$, $\int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(\alpha,\beta,x)\,dx$, $\int\limits_0^{+\infty} f'_\beta(\alpha,\beta,x)\,dx$
сходятся равномерно для $\alpha>0$ и $\beta>0$ по признаку Вейерштрасса.
Поэтому

$$I'_\alpha = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos mx\,dx = \left[\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2+m^2}(\alpha\cos mx - m\sin mx)\right]\Bigg|_0^{+\infty} = -\frac{\alpha}{\alpha^2+m^2},$$

$$I'_\beta = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos mx\,dx = -\left[\frac{e^{-\beta x}}{\beta^2+m^2}(\beta\cos mx - m\sin mx)\right]\Bigg|_0^{\infty} = \frac{\beta}{\beta^2+m^2}.$$

$$I(\alpha,\beta) = -\int\frac{\alpha\,d\alpha}{\alpha^2+m^2} = -\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+m^2)+C(\beta) \Rightarrow$$

$$I'_\beta = C'_\beta = \frac{\beta}{\beta^2+m^2} \Rightarrow C(\beta) = \frac{1}{2}\ln(\beta^2+m^2)+C \Rightarrow$$

$$I(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}+C$$

При $\alpha=\beta$ $I(\alpha,\beta)=0 \Rightarrow C=0$. Окончательно

$$I(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}$$

№3799 Вычислить интеграл $I=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx$

Сделаем замену переменной $z=\sqrt{x^2-1} \Rightarrow x^2=z^2+1 \Rightarrow x=\sqrt{z^2+1}$ и
$dx=\dfrac{z\,dz}{\sqrt{1+z^2}}$, тогда

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\alpha\sqrt{1+z^2}}{\cancel{z}(z^2+1)}\cdot\frac{z\,dz}{\sqrt{z^2+1}} = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\alpha\sqrt{1+z^2}}{(z^2+1)^{3/2}}\,dz$$

Подинтегральная функция $f(\alpha,z)=\dfrac{\operatorname{arctg}\alpha\sqrt{1+z^2}}{(z^2+1)^{3/2}}$ и ее частная

производная
$$f'_\alpha(\alpha,z) = \frac{1}{(z^2+1)\left([1+\alpha^2]+\alpha^2 z^2\right)}$$
определены и непрерывны для $z\in[0;+\infty)$ и $\alpha\in(-\infty;+\infty)$.

При каждом $\alpha\in(-\infty;+\infty)$ интеграл I сходится по признаку Вейерштрасса:
$$|f(\alpha,z)| \le \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+z^2},\quad \int_0^{+\infty}\frac{dz}{1+z^2}<\infty,$$
а интеграл $\int_0^{+\infty} f'_\alpha(\alpha,z)\,dz$ сходится равномерно по тому же признаку:
$$|f'_\alpha(\alpha,z)| \le \frac{1}{z^2+1}$$
Поэтому существует
$$I'_\alpha = \int_0^{+\infty}\frac{dz}{(1+z^2)\left([1+\alpha^2]+\alpha^2 z^2\right)} =$$
$$= \int_0^{+\infty}\left\{\frac{1}{1+z^2}-\frac{\alpha^2}{[1+\alpha^2]+\alpha^2z^2}\right\}dz = \frac{\pi}{2}-\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\int_0^{+\infty}\frac{d\left(\frac{|\alpha|z}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)}{1+\left(\frac{|\alpha|z}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2} =$$
$$= \frac{\pi}{2}-\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right) \Rightarrow$$
$$\exists\, \alpha>0:\ I'_\alpha = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right) \Rightarrow I_+ = \frac{\pi}{2}\left(\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}\right)+C_+$$
$$\exists\, \alpha<0:\ I'_\alpha = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right) \Rightarrow I_- = \frac{\pi}{2}\left(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2}\right)+C_-$$
$$I(0)=I_+(0)=I_-(0)=0 \Rightarrow C_+=\frac{\pi}{2},\ C_-=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$
$$I_+(\alpha) = \frac{\pi}{2}\left(1+\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}\right),\quad I_-(\alpha) = -\frac{\pi}{2}\left(1-\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}\right)$$
Объединяя, получаем:
$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\left(1+|\alpha|-\sqrt{1+\alpha^2}\right).$$

Дома: №№ 3785, 3786, 3792, 3793, 3795, 3797

№3785 Используя формулу $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}$, $a>0$ вычислить интеграл

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}},\ n\in\mathbb{N}.$$

Возьмём равенство $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}$ и продифференцируем по параметру a.
Подинтегральная функция дифференцируема, при фиксированном a интеграл от функции $\frac{1}{x^2+a}$ сходится при $a>0$, так как это вычислимый интеграл. Пусть $a\geqslant a_0$ для $\forall a_0>0$. Тогда интеграл от производной по параметру

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^2}=\int\limits_0^{1}\frac{dx}{(x^2+a)^2}+\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^2}$$

$\frac{1}{(x^2+a)^2}\leqslant\frac{1}{x^4}$ и $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$ сходится $\Rightarrow$ второй интеграл сходится равномерно по Вейерштрассу

$\frac{1}{(x^2+a)^2}\leqslant\frac{1}{(x^2+\varepsilon)^2}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}$ и $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\varepsilon^2}$ сходится $\Rightarrow$ первый интеграл сходится равномерно по Вейерштрассу.

Значит можно дифференцировать при $a\geqslant a_0$ для $\forall a_0>0$. Значит, можно дифференцировать при всех $a>0$. Поэтому имеем равенство (см (*))

№3786. Доказать, что интеграл Дирихле $I(\alpha)=\int\limits^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$ имеет при $\alpha\neq0$ производную, однако её нельзя найти с помощью правила Лейбница.

Действительно, согласно правилу Лейбница

$$I'_\alpha=\int\limits_0^{+\infty}\cos\alpha x\,dx\ -\text{ это расходящийся интеграл.}$$

С другой стороны $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\left|z=\alpha x\right|=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\frac{\pi}{2}$

Откуда $I'_\alpha\equiv0$. для $\alpha\neq0$

Такой эффект происходит из-за расходимости интеграла от частной производной подинтегральной функции по параметру α.

№3785(*) $$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}$$

и так далее до порядка $(n+1)$. Получаем формулу

$$I=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{-(n+\frac{1}{2})}.$$

№3793 Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\,dx$, $\alpha>0$, $\beta>0$.

Функция $f(\alpha,\beta,x)=\dfrac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}$ и ее производные

$$f'_\alpha(\alpha,\beta,x)=-xe^{-\alpha x^2},\quad f'_\beta(\alpha,\beta,x)=xe^{-\beta x^2}$$

определены и непрерывны для $x\in[0;+\infty)$, $\alpha\in(0;+\infty)$, $\beta\in(0;+\infty)$.

Интегралы $\int\limits_0^{+\infty}f(\alpha,\beta,x)\,dx$, $\int\limits_0^{+\infty}f'_\alpha(\alpha,\beta,x)\,dx$, $\int\limits_0^{+\infty}f'_\beta(\alpha,\beta,x)\,dx$

сходятся равномерно для $\alpha>0$ и $\beta>0$ по признаку Вейерштрасса. Поэтому

$$I'_\alpha=-\int\limits_0^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}dx=-\frac{1}{2\alpha}\int\limits_0^{+\infty}e^{-z}dz=-\frac{1}{2\alpha};$$

$$I'_\beta=\int\limits_0^{+\infty}xe^{-\beta x^2}dx=\frac{1}{2\beta}\int\limits_0^{+\infty}e^{-z}dz=\frac{1}{2\beta}$$

$$I'_\alpha=-\frac{1}{2\alpha}\Rightarrow I(\alpha,\beta)=-\frac{1}{2}\ln\alpha+C(\beta)\Rightarrow I'_\beta=C'_\beta=\frac{1}{2\beta}\Rightarrow C(\beta)=\frac{1}{2}\ln\beta+C\Rightarrow$$

$$I(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}+C.$$

При $\alpha=\beta$ $I(\alpha,\beta)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow I(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$.

№3795 Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx$.

Функция $f(\alpha,\beta,x)=\dfrac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx$ и ее производные

$$f'_\alpha(\alpha,\beta,x)=-e^{-\alpha x}\sin mx,\quad f'_\beta(\alpha,\beta,x)=e^{-\beta x}\sin mx$$

определены и непрерывны для $x\in[0;+\infty)$, $\alpha\in(0;+\infty)$, $\beta\in(0;+\infty)$.

Интегралы $\int\limits_0^{+\infty}f(\alpha,\beta,x)\,dx$, $\int\limits_0^{+\infty}f'_\alpha(\alpha,\beta,x)\,dx$, $\int\limits_0^{+\infty}f'_\beta(\alpha,\beta,x)\,dx$

сходятся равномерно для $\alpha>0$ и $\beta>0$ по признаку Вейерштрасса.

Поэтому

$$I'_\alpha=-\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin mx\,dx=\left[\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2+m^2}(\alpha\sin mx+m\cos mx)\right]\Bigg|_0^{+\infty}=-\frac{m}{\alpha^2+m^2}$$

$$I'_\beta = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\sin mx\,dx = -\left[\frac{e^{-\beta x}}{\beta^2+m^2}\left(\beta\sin mx + m\cos mx\right)\right]\Bigg|_0^\infty = \frac{m}{\beta^2+m^2}$$

Пусть теперь $m \neq 0$:

$$I(\alpha,\beta) = -\int \frac{m\,d\alpha}{\alpha^2+m^2} = -\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m} + C(\beta) \Rightarrow$$

$$I'_\beta = C'_\beta = \frac{m}{\beta^2+m^2} \Rightarrow C(\beta) = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{m} + C \Rightarrow$$

$I(\alpha,\beta) = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{m} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m} + C$. Но при $\alpha = \beta$ $I(\alpha,\beta) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Поэтому $\begin{cases} \text{для } m \neq 0 & I(\alpha,\beta) = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{m} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m} \\ \text{для } m = 0 & I(\alpha,\beta) = 0 \end{cases}$

№3791 Вычислить интеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x}\,dx$, $a>0, b>0$.

Имеем $f(z) = \sin z$. Для произвольного $A>0$ интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{\sin z}{z}\,dz$ сходится по признаку Дирихле. Поэтому

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a} = 0.$$ Итак $I = 0$

3792. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x - \operatorname{arctg}\beta x}{x}\,dx = -\int_0^{+\infty} \frac{\left(-\operatorname{arctg}\alpha x + \frac{\pi}{2}\right) - \left(-\operatorname{arctg}\beta x + \frac{\pi}{2}\right)}{x}\,dx$

Рассмотрим функцию $f(z) = -\operatorname{arctg} z + \frac{\pi}{2}$.

Установим сходимость интеграла $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{-\operatorname{arctg} z + \frac{\pi}{2}}{z}\,dz$

Покажем, что $-\operatorname{arctg} z + \frac{\pi}{2} \sim \operatorname{arctg}\frac{1}{z}$ при $z \to +\infty$.

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{-\operatorname{arctg} z + \frac{\pi}{2}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{z}} = \lim_{z\to+\infty} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} z\right)}{\operatorname{arctg}\frac{1}{z}} = \lim_{z\to+\infty} \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} z)\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{z}} = 1.$$

Имеем $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{z}}{z}\,dz \sim \int_A^{+\infty} \frac{dz}{z^2}$ сходится!

Выполнены условия формулы Фруллани.